Versione da non modificare , per riferimento di futuri sviluppi... (ultimi ritocchi nel giugno 2012 e congelata nel gennaio 2013)

Convenzioni per il calcolo tensoriale

19 gennaio 2011

Propongo una serie di regole per riassumere concisamente, nel nome di un insieme di dati, le informazioni sul rango del tensore, sull'eventuale tipo di derivata totale (che quindi non ha modificato il rango del tensore) applicata al tensore stesso, sulla natura delle componenti del vettore, matrice o tensore di rango superiore ovvero sulla covarianza o controvarianza di ciascun indice del tensore ed infine sul nome globale degli indici o sulla precisazione della componente considerata.

Lo scopo è quello di poter realizzare formule scritte in puro testo ossia senza uso di effetti tipografici.

Questa esigenza si presenta quando bisogna dialogare con un qualche interlocutore usando la posta elettronica ma, soprattutto, quando si vuole scrivere in un qualche linguaggio di programmazione numerica come il Fortran, il C, il JavaScript o in linguaggi di nicchia come Matlab o Octave o in linguaggi usabili per il calcolo simbolico come Maxima o Maple o Sage o *Mathematica*,

La notazione tensoriale è odiata da molta gente che va in confusione in presenza di indici scritti in basso (covarianti) o in alto (controvarianti, confondibili con gli esponenti) ma è una notazione molto potente che merita di essere recepita ed applicata e soprattutto utilizzata nella scrittura di software scientifico.

Un tensore ha un dato "rango" R, può essere ottenuto tramite derivazione totale da un qualche tensore "antenato", è applicabile in spazi ad N dimensioni ed i suoi indici sono di vario tipo: covarianti, controvarianti, ottenuti tramite derivazione parziale ordinaria (per cui si parla di pseudotensori) o di derivata covariante o di derivata controvariante (ottenuta tramite trasformazione in controvariante dell'indice ottenuto tramite derivata covariante).

Convenzioni

Per specificare tutte le informazioni collaterali nel simbolo della variabile tensoriale bisogna usare in modo opportuno i caratteri alfabetici e le cifre decimali.

Le cifre decimali sono notoriamente dieci (0... 9) e, in certe situazioni particolari, la loro numerosità potrebbe essere insufficiente per cui definisco questa convenzione preliminare che applicherò rarissimamente:

- **Convenzione della cifra 9:**

Se il carattere che precede la cifra 9 è alfabetico va considerato come una estensione della cifra stessa secondo questa regola:

- **z9 = 9 ; (in pratica la cifra coincide col suo valore numerico)**
- **a9 = 10 ; b9 = 11 ; c9 = 12 ... y9 = 25 ;**

Dunque con la regola del 9 è possibile avere un intervallo di valori esteso fino a 25, il che mi sembra ampiamente adeguato alle esigenze più improbabili della specifica dei tensori...

Alzi la mano chi ha dovuto scrivere formule con tensori di rango 9 o superiore.... Ma per stabilire una convenzione usabile anche nelle situazioni più estreme...

- **Struttura del nome del tensore:**

Ecco come suggerisco di codificare numerose informazioni nel nome globale della variabile che rappresenta un tensore:

Nome, Rango, Derivtotale, Tipoindici, Nomeindici, Altro

Le varie parti del nome globale si riconoscono per l'alternanza di cifre e caratteri alfabetici. In sequenza la struttura del nome completo sarà questa (usando il punto solo qui per chiarezza) :

alfabetico.cifra.alfabeticofacoltativo.cifre.alfanumerico.alfanumerico

dove la prima cifra determina la lunghezza dei blocchi di caratteri successivi per cui non occorre separare i blocchi con appositi caratteri separatori.

Descrizione dettagliata delle varie parti del nome globale:

- **Nome (uno o più caratteri alfabetici)**

Deve essere costituito da una sequenza di carattei alfabetici (lettere latine ed eventualmente greche o di altro alfabeto Unicode) e solitamente termina con la prima cifra. Se però la prima cifra è 9 scatta la convenzione della cifra 9 per cui l'ultimo carattere alfabetico diventa una estensione della cifra 9 (ossia a9 indica 10, b9 indica 11 etc. mentre con z9 si indica la sola cifra 9) ed in questo raro caso il nome si estende fino al penultimo carattere alfabetico che precede la prima cifra presente nel nome del tensore.

- **Rango (una cifra)**

Gli scalari sono indicati dalla cifra 0, i vettori dalla cifra 1, i tensori di rango 2, ossia le matrici, sono indicate dalla cifra 2 etc. Se il tensore, in caso estremamente insolito, fosse di rango 9 o superiore si applica la convenzione del nove ossia il carattere alfabetico da a9 a y9 indica un numero da 10 a 25 mentre il tensore di rango 9 va specificato con la coppia z9.

- **Derivtotale == Derivazione totale (zero o più caratteri alfabetici)**

Un tensore può essere ottenuto tramite derivazione di un qualche parametro di un tensore "antenato" dello stesso rango. Esempio importante la velocità ottenuta come derivata della posizione rispetto al parametro detto tempo proprio della particella. In genere si indicherà con *s* o con *v* il parametro lunghezza propria o tempo proprio (per non usare lettere greche) mentre si potrà usare *t* per indicare il tempo misurato dall'osservatore usato come parametro scalare (lo è effettivamente in meccanica classica ma non in meccanica relativistica per cui in questo caso il risultato è uno pseudo tensore).

La variabile di derivazione totale deve essere monocarattere e le derivate miste o di ordine superiore si specificano ripetendo il nome della variabile di derivazione. Per esempio se f0 è una data funzione scalare, f0t rappresenta la sua derivata rispetto al tempo e f0tt la sua derivata seconda rispetto al tempo. Se A1 indica la posizione della particella A, allora A1t indica la velocità (e non essendo t un invariante non è un vero tensore) e A1tt indica l'accelerazione ordinaria (non covariante). Notare che la cifra 1 indica il rango di A ossia specifica che si tratta di un tensore di rango 1 ossia un vettore.

La derivata totale di un tensore del primo ordine o superiore richiede l'uso dei simboli di Christoffel ossia bisogna distinguere tra derivata totale ordinaria e derivata covariante. I caratteri alfabetici minuscoli indicano derivata ordinaria mentre quelli maiuscoli indicano derivata covariante. Per esempio la derivata della velocità rispetto al tempo proprio (tale velocità è indicata con A1v1) se covariante va indicata A1vV1 mentre se è ordinaria va indicata con A1vv1.

- **Tipoindici (tante cifre quanto indicato dal rango)**

Alla base del calcolo tensoriale c'è la distinzione tra indici di tipo covariante (scritti in basso) e di tipo controvariante (scritti in alto).

Le cifre pari, zero incluso, corrispondono ad indici scritti in basso mentre le cifre dispari corrispondono ad indici scritti in alto.

Valgono inoltre queste convenzioni sull'origine dell'indice ossia su come è stato ottenuto trasformando un tensore di rango inferiore.

0 == indice ottenuto tramite derivata parziale ordinaria o reso pseudo tensoriale a causa di derivazione totale ordinaria. Il risultato dunque NON è un tensore ma uno pseudotensore.

1 == indice controvariante di origine imprecisata (tradizionalmente scritto in alto).

2 == indice covariante di origine imprecisata (tradizionalmente scritto in basso).

6 == indice covariante ottenuto tramite derivazione parziale covariante ossia aggiungendo allo pseudotensore ottenuto tramite derivata parziale ordinaria i vari termini correttivi calcolati usando i simboli di Christoffel (detti anche coefficienti di connessione).

7 == indice controvariante ottenuto trasformando in controvariante, tramite il tensore metrico controvariante, l'indice di tipo 6 ossia quello ottenuto tramite derivazione covariante.

Le restanti cifre (3, 4, 5, 8) possono essere usate a discrezione del programmatore per indicare altre procedure di generazione dell'indice. Vale comunque la regola che le cifre pari debbono essere pensate come indici scritti in basso (quindi operanti come indici covarianti) mentre le cifre dispari vanno pensate come indici scritti in alto. Lo stare in basso o in alto è una informazione essenziale nell'effettuazione delle operazioni di contrazione degli indici altrimenti dette prodotti scalari generalizzati.

- **Nomeindici (tanti caratteri alfanumerici quanto indicato dal rango)**

I nomi degli indici debbono essere monocarattere.

L'indicazione del nome degli indici è facoltativa ossia va fatta solo se è necessario attribuire un qualche nome agli indici per specificare la modalità di effettuazione di una qualche permutazione o per indicare una specifica componente del tensore o per effettuare una qualche operazione di contrazione tensoriale (prodotto scalare generalizzato).

Se un indice è una cifra, la cifra indica la specifica componente di quella dimensione mentre se è un carattere alfabetico il nome indica l'insieme delle componenti ossia è un nome di gruppo usato per specificare la modalità di effettuazione di una qualche operazione sugli indici ossia per distinguere un gruppo di componenti da un altro gruppo.

- **Altro (zero o più caratteri a piacere ossia secondo esigenze varie)**

Dato che il rango precisa quanti sono gli indici del tensore, tutti i caratteri in più rispetto a quelli necessari per specificare i nomi degli indici possono servire a qualsiasi scopo, in base alle esigenze del programmatore.

Per esempio se voglio indicare la terza componente dell'accelerazione della particella A, tenuto conto che i vettori posizione si usano prevalentemente con componenti controvarianti, dovrei scrivere, in base alle regole ora esposte, A1vV13 che va così decodificato: A == nome della particella, 1 == rango unitario ossia vettore, vV == derivata seconda rispetto al parametro v ossia il tempo proprio, 1 == tipo controvariante dell'unico indice del vettore, 3 == terza componente del vettore o quarta se la numerazione delle componenti parte da 0. Dopo questi dati caratterizzanti posso però scrivere qualsiasi cosa come ad esempio A1vV13pippo per indicare una qualche copia temporanea dell'oggetto A1vV13.

Esempi preliminari di uso frequente

Tradizionalmente il nome del tensore metrico è g e pertanto, usando la massima concisione, il tensore metrico covariante va indicato con g222 dove il primo 2 indica il suo rango (è di rango due ossia è una matrice simmetrica) mentre le altre due cifre 2 indicano il tipo di indici ossia il tipo è covariante. Il tensore metrico totalmente controvariante ossia la matrice inversa di g222 si indica con g211 perché i suoi due indici sono di tipo 1 ossia appunto controvarianti.

Per usare il tensore metrico occorre attribuire un nome agli indici e pertanto, per esempio, g222ik rappresenta g222 ma col nome i assegnato al primo indice e k al secondo. I nomi attribuiti agli indici possono cambiare in base alle esigenze ossia g222ab coincide con g222ik con l'unica differenza di avere chiamato a il primo indice e b il secondo.

Convenzione di Einstein: se due indici hanno lo stesso nome ma sono di tipo diverso bisogna effettuare l'operazione di contrazione ovvero il prodotto scalare generalizzato.

Se per esempio ho il vettore V11k ossia un tensore di nome V, rango 1, tipo 1 ossia controvariante e nome k del suo indice, il vettore corrispondente ma di tipo covariante va indicato con V12h dove il 2 indica il tipo covariante mentre ho arbitrariamente usato h come nome dell'indice per sottolineare che la scelta del nome dell'indice è arbitraria. A questo punto se scrivo V11k*V12k (oppure sottintendendo l'operatore * come è ammesso in *Mathematica*, V11k V12k) faccio la contrazione dell' unico indice del tensore V ossia calcolo il prodotto scalare di V11k con se stesso ed ottengo il quadrato della sua norma ossia posso scrivere, per esempio, nV0 = Sqrt[V11k*V12k] dove ho indicato con nV0 la norma che, ovviamente, è una grandezza scalare ossia di rango 0.

Se avessi fatto la stessa operazione ma usando nomi di indici diversi, avrei ottenuto non uno scalare ma un tensore di ordine due ossia una matrice ossia : V212kh = V11k*V12h dove il tensore avrebbe il primo indice di tipo controvariante ed il secondo di tipo covariante.

Per trasformare un vettore controvariante in uno covariante bisogna usare il tensore metrico covariante ossia, per esempio, V12i = g222ik*V11k ; viceversa per ottenere un vettore controvariante dato uno covariante bisogna usare il tensore metrico controvariante ossia V11i = g211ik*V12k . Da questa regola deriva la necessità che la matrice del tensore metrico covariante g222 deve essere l'inversa di quella del tensore metrico controvariante ossia g211. In notazione tensoriale scriverò : g211ik*g222kh = g212hk dove il tensore g212 è in pratica costruito col simbolo di Leopold Kronecker ossia è una matrice identità ovvero g21200 = g21211 = g21222 =... = 1 mentre g212hk = 0 se h è diverso da k.

Di solito, tradizionalmente, i simboli di Christoffel, che sono degli pseudo tensori di rango 3, sono indicati col nome ch per cui il simbolo di Christoffel di prima specie è indicato con ch3222 mentre quello di seconda specie ossia quello effettivamente utilizzato per fare la derivata covariante è indicato con ch3122. Ovviamente, di solito occorre attribuire un nome agli indici ossia potrei scrivere ch3222ijk oppure ch3122ijk a seconda dei casi...

Qualche volta, invece di scrivere ch3122 può capitare di vedere scritto ch3100 per ricordare che i simboli di Christoffel non sono veri tensori ma sono degli pseudo tensori dato che, usando opportuni sistemi di riferimento, possono essere resi completamente nulli in prefissati punti dello spazio... il che non è possibile con un vero tensore dato che da un vero tensore si possono ottenere degli invarianti e se tali invarianti non sono nulli in un dato sistema di riferimento non possono essere nulli in nessun altro sistema di riferimento (come dice la parola un invariante non varia al cambiare del sistema di riferimento... la norma di un vettore è un invariante e dunque vale sempre lo stesso, comunque si cambi il sistema di riferimento).

▪ Alcune formule tensoriali

Come esempi di applicazione di queste convenzioni riporto qui alcune formule di uso molto frequente.

Per non usare lettere greche indico il tempo proprio con v piuttosto che con τ e le coordinate sferiche con { r, h, p } piuttosto che con { ρ, θ, ϕ }; la velocità della luce con ç in luogo del classico c che, a parer mio, è un simbolo troppo generico.

Il simbolo di Christoffel di seconda specie è dato da:

$$\Gamma^i{}_{k,h} = \frac{1}{2}\, g^{i,m} \left(\frac{\partial g_{m,k}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{h,m}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k,h}}{\partial x^m}\right)$$

ch3122ikh = g211im * (g3220mkh + g3220hmk - g3220khm) / 2

La funzione nel linguaggio di *Mathematica* che lo calcola per uno spazio di almeno due dimensioni è la seguente:

```
faCh3122[g222_, lv_] := Block[{i, g211, g3022, ch3222},
   If[2 > Length[lv], Return["Lista variabili inferiore a 2"]];
   g211 = Simplify[Inverse[g222]];
   g3022 = Table[D[g222, lv[[i]]], {i, 1, Length[lv]}];
   ch3222 = (Transpose[g3022, {3, 1, 2}] + Transpose[g3022, {2, 3, 1}] - g3022) / 2;
   Simplify[Dot[g211, ch3222]]];
faCh3122::usage = "Calcola i simboli di Christoffel di seconda specie";
```

Si noti che con g3022 si è indicato lo pseudotensore del terzo ordine ottenuto derivando il tensore metrico covariante g222 per ciascuna delle quattro variabili dello spazio quadridimensionale utilizzato nella relatività generale. La funzione utilizza g3022 in luogo di g3220 per evitare di fare una superflua trasposizione degli indici. Il secondo argomento, lv, è appunto il vettore dei simboli delle variabili spazio temporali dipendenti dal tempo proprio v ossia, in coordinate cartesiane { t, x, y, z } mentre in coordinate sferiche { t, r, h, p }.

Oltre alle funzioni Block, Simplify e all' Inverse che calcola la matrice inversa del tensore metrico covariante ossia il tensore metrico controvariante g211, viene effettuata la derivazione simbolica tramite la funzione D documentata in:

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/D.html

Viene fatto uso dell'operatore Dot documentato in:

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Dot.html

Viene inoltre usata la Transpose per scambiare gli indici tensoriali:

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Transpose.html

Il tensore di Riemann svolge un ruolo fondamentale nel calcolo tensoriale e quindi è opportuno avere sempre sotto mano la sua complicata definizione che può essere fatta in termini di derivate dei simboli di Christoffel di seconda specie oppure facendo le derivate seconde del tensore metrico covariante.

$$R^i{}_{k,h,m} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{k,m}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{k,h}}{\partial x^m} + \Gamma^i{}_{h,n}\ \Gamma^n{}_{k,m} - \Gamma^i{}_{m,n}\ \Gamma^n{}_{k,h}$$

che in base alle convenzioni si scrive:

r41222ikhm = ch41220ikmh - ch41220ikhm + ch3122ihn*ch3122nkm - ch3122imn*ch3122nkh

Pertanto, le trasposizioni da fare, fissate le cifre corrispondenti agli indici ovvero i = 1, k = 2, h = 3 e m = 4, sono le seguenti: per il primo termine {3,1,2,4}, per il secondo {4,1,2,3}, per il terzo {1,3,2,4} e per il quarto {1,4,2,3}.
Naturalmente, a causa della simmetria del simbolo di Christoffel di seconda specie $\Gamma^i{}_{k,h}$ ossia per il fatto che è simmetrico rispetto ai due ultimi indici, il tensore di Riemann potrebbe essere scritto in vari modi, per esempio scambiando tra loro *k* con *h* nell'ultimo termine... Comunque questi modi alternativi non cambiano la sostanza della formula...
Ecco dunque la funzione per calcolare il tensore di curvatura, ovvero tensore di Riemann, partendo dai simboli di Christoffel:

```
faRiemann41222[ch3122_, lv_] := Block[
   {i, ch40122, r1, r2, cx, r3, r4},
   If[2 > Length[lv], Return["Lista variabili inferiore a 2"]];
   ch40122 = Simplify [Table[D[ch3122, lv[[i]]], {i, 1, Length[lv]}]];
   r1 = Transpose[ch40122, {3, 1, 2, 4}];
   r2 = Transpose[ch40122, {4, 1, 2, 3}];
   cx  = Simplify[ch3122.ch3122];
   r3  = Transpose[cx, {1, 3, 2, 4}];
   r4  = Transpose[cx, {1, 4, 2, 3}];
   Simplify[r1 - r2 + r3 - r4]];
faRiemann41222::usage = "Tensore di Riemann di tipo 1222";
```

Il tensore di Riemann può essere calcolato anche in questo modo basato sul calcolo delle derivate seconde del tensore metrico covariante:

$$R_{i,k,h,m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{i,m}}{\partial x^k\, \partial x^h} + \frac{\partial^2 g_{k,h}}{\partial x^i\, \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{i,h}}{\partial x^k\, \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{k,m}}{\partial x^i\, \partial x^h} \right) + g_{n,p}\left(\Gamma^n{}_{k,h}\, \Gamma^p{}_{i,m} - \Gamma^n{}_{k,m}\, \Gamma^p{}_{i,h} \right)$$

Si tratta di una formula già complicata di per sè e dunque è inevitabile che la sua traduzione, basata sulle convenzioni qui esposte, produca una espressione prolissa...

r42222ikhm = (g42200imkh + g42200khim - g42200ihkm - g42200kmih)/2 +
g222np*(ch3122nkh*ch3122pim - ch3122nkm*ch3122pih)

La funzione che effettua il calcolo in base a queste formule prendendosi la briga anche di calcolare i simboli di Christoffel di seconda specie è la seguente:

```
faRiemann42222[g222_, lv_] := Block[
   {i, g3022, g40022, ch3222, tt, ta, tb, ga, gb, gc, gd},
   If[2 > Length[lv], Return["Lista variabili inferiore a 2"]];
   g3022 = Table[D[g222, lv[[i]]], {i, 1, Length[lv]}];
   g40022 = Table[D[g3022, lv[[i]]], {i, 1, Length[lv]}];
   ch3222 = (Transpose[g3022, {3, 1, 2}] + Transpose[g3022, {2, 3, 1}] - g3022) / 2;
   tt = Transpose[Inverse[g222].ch3222, {3, 2, 1}].ch3222;
   ta = Transpose[tt, {2, 3, 1, 4}];
   tb = Transpose[tt, {2, 4, 1, 3}];
   ga = Transpose[g40022, {2, 3, 1, 4}];
   gb = Transpose[g40022, {1, 4, 2, 3}];
   gc = Transpose[g40022, {2, 4, 1, 3}];
   gd = Transpose[g40022, {1, 3, 2, 4}];
   Simplify[(ga + gb - gc - gd) / 2 + ta - tb ]];
faRiemann42222::usage = "Tensore di Riemann di tipo 2222";
```

Il tensore di Ricci (un tensore di rango 2 simmetrico) è una delle possibili tracce generalizzate del tensore di Riemann.

$$R_{j,k} = R^{n}{}_{j,n,k}$$

Tradotto in puro testo con le presenti convenzioni si ha:

r222jk = r41222njnk

dove va notato l'indice n ripetuto ma di tipo diverso ossia il primo di tipo 1 ossia controvariante ed il secondo di tipo 2 ossia covariante

Tradotto in "mathematichese" si può definire la seguente funzione che sfrutta quelle definite in precedenza:

```
faRicci222[g222_, lv_] := Block[{ch3122, r41222},
   ch3122 = faCh3122[g222, lv];
   r41222 = faRiemann41222[ch3122, lv];
   Simplify[Tr[Transpose[r41222, {1, 3, 2, 4}], Plus, 2]]];
faRicci222::usage = "Tensore di Ricci di tipo 22";
```

Notare qui l'uso della funzione per il calcolo della traccia, Tr documentata in

http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Tr.html

Oltre a queste definizioni di tensori di uso molto frequente, merita di essere ricordata la legge di Newton in ambito relativistico ossia la seguente legge:

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}x^i + \Gamma^{i,}{}_{a,b}\frac{d}{d\sigma}x^a\,\frac{d}{d\sigma}x^b = F^i - g_{a,b}F^a\frac{d}{d\sigma}x^b\frac{d}{d\sigma}x^i$$

dove x^i rappresenta il vettore posizione della particella, σ è detto parametro affine ossia un invariante che coincide col tempo proprio τ della particella se la particella è dotata di massa ed F^i è il vettore della forza che agisce sulla particella e che, grazie alla correzione apportata dal termine $g_{a,b}F^a\frac{d}{d\sigma}x^b\frac{d}{d\sigma}x^i$ risulta ortogonale alla velocità covariante della particella. L'accelerazione agente sulla particella è espressa dal termine $\frac{d^2}{d\sigma^2}x^i + \Gamma^{i,}{}_{a,b}\frac{d}{d\sigma}x^a\,\frac{d}{d\sigma}x^b$ il quale è fatto da due parti ossia la accelerazione ordinaria (la derivata seconda della posizione ovvero la derivata prima della velocità) ed il termine correttivo necessario per ottenere la derivata covariante della velocità della particella ossia l'accelerazione in forma controvariante (controvariante come lo sono i vettori posizione e velocità della particella).

Se invece della posizione facciamo uso della velocità della particella, definita come:

$$u^i = \frac{d}{d\sigma}x^i$$

la legge di Newton relativistica può essere scritta nel seguente modo più conciso:

$$\frac{d}{d\sigma}u^i + \Gamma^{i,}{}_{a,b}\, u^a\, u^b = F^i - g_{a,b}F^a\, u^b\, u^i$$

ed oltre a questo non va dimenticato che le quattro componenti del vettore velocità sono tra loro legate da una relazione algebrica. Nel caso di particella dotata di massa la legge è:

$$g_{a,b}\, u^a\, u^b = ç^2$$

Viceversa nel caso di una particella priva di massa (ossia un fotone) la legge diventa:

$$g_{a,b}\, u^a\, u^b = 0$$

La traduzione di queste formule seguendo queste convenzioni è la seguente:

Legge di Newton per il vettore posizione X11i (con v indico il tempo proprio della particella che con lettere greche sarebbe τ):

X1vv0i + ch3122iab*X1v1a*X1v1b = F11i - g222ab*F11a*X1v1b*X1v1i

Notare che ho scritto X1vv0i usando la cifra 0 per segnalare che si tratta di uno pseudo tensore dato che la derivata ordinaria non genera veri tensori. Dunque con X1vv0 indico la derivata ordinaria di X1v1 rispetto al tempo proprio indicato da v e non la derivata covariante che produrrebbe un vero tensore. In modo più conciso avrei cioè potuto segnalare l'uso della derivata covariante ossia, tenendo presente che la derivata covariante si ottiene in questo modo:

X1vV1i = X1vv0i + ch3122iab*X1v1a*X1v1b

avrei dunque potuto scrivere un po' più sinteticamente la legge di Newton:

X1vV1i = F11i - g222ab*F11a*X1v1b*X1v1i

Legge di Newton, formulata per il vettore quadrivelocità U11i = X1v1i ha una forma più concisa:

U1v0i + ch3122iab*U11a*U11b = F11i - g222ab*F11a*U11b*U11i

ed anche in questo caso, usando V in luogo di v e il carattere 1 invece che 0 per segnalare la derivata covariante:

U1V1i = U1v0i + ch3122iab*U11a*U11b

si potrebbe scrivere:

U1V1i = F11i - g222ab*F11a*U11b*U11i

Il vincolo algebrico per una particella dotata di massa :

g222ab*U11a*U11b = ç^2

Il vincolo algebrico per una particella senza massa (un fotone)

g222ab*U11a*U11b = 0

Regole della derivazione covariante

La derivata di un tensore di rango superiore a 0 (dunque escluso lo scalare) richiede l'uso dei simboli di Christoffel di seconda specie. Le formule devono tenere conto anche del tipo di indice ossia fa differenza se l'indice è di tipo covariante o controvariante.

Nel seguito uso una convenzione grafica leggermente NON standard ossia separo gli indici con virgole (di solito omesse) e se l'indice è ottenuto per derivata ordinaria uso il carattere barra "/" mentre se è ottenuto per derivata covariante uso il carattere due punti ":" mentre solitamente viene usato il carattere punto e virgola ";". Se la derivata è covariante ma totale ossia fatta rispetto ad un parametro invariante, uso il carattere punto esclamativo "!" in luogo del carattere ":" per evidenziare che la derivata è totale e non parziale.

La derivata covariante di uno scalare coincide con quella ordinaria ossia non richiede l'uso dei simboli di Christoffel.

La derivata covariante di un vettore genera un tensore di rango 2 con questa regola:

$$A^i{}_{:k} = \frac{\partial}{\partial x^k} A^i + \Gamma^{i,}{}_{k,h}\, A^h = A^i{}_{/k} + \Gamma^{i,}{}_{k,h}\, A^h$$

$$A_{i:k} = \frac{\partial}{\partial x^k} A_i - \Gamma^{h,}{}_{i,k}\, A_h = A_{i/k} - \Gamma^{h,}{}_{i,k}\, A_h$$

Con le convenzioni qui adottate si ha:

A218ik = A210ik + ch3122ikh*A11h

A228ik = A220ik - ch3122hik*A12h

La derivata covariante di una matrice ossia di un tensore di rango 2 va fatta così:

$$A^{i,j}{}_{:k} = \frac{\partial}{\partial x^k} A^{i,j} + \Gamma^{i,}{}_{h,k}\, A^{h,j} + \Gamma^{j,}{}_{h,k}\, A^{i,h} = A^{i,j}{}_{/k} + \Gamma^{i,}{}_{h,k}\, A^h + \Gamma^{j,}{}_{h,k}\, A^{i,h}$$

$$A_{i,j:k} = \frac{\partial}{\partial x^k} A_{i,j} - \Gamma^{h,}{}_{i,k}\, A_{h,j} - \Gamma^{h,}{}_{j,k}\, A_{i,h} = A_{i,j/k} - \Gamma^{h,}{}_{i,k}\, A_{h,j} - \Gamma^{h,}{}_{j,k}\, A_{i,h}$$

$$A^{i,}{}_{j:k} = \frac{\partial}{\partial x^k} A^{i,}{}_j + \Gamma^{i,}{}_{h,k}\, A^{h,}{}_j - \Gamma^{h,}{}_{j,k}\, A^{i,}{}_h = A^{i,}{}_{j/k} + \Gamma^{i,}{}_{h,k}\, A^{h,}{}_j - \Gamma^{h,}{}_{j,k}\, A^{i,}{}_h$$

Con le convenzioni qui adottate si ha:

A3118ijk = A3110ijk + ch3122ihk*A211hj + ch3122jhk*A211ih

A3228ijk = A3220ijk - ch3122hik*A222hj - ch3122hjk*A222ih

A3128ijk = A3120ijk + ch3122ihk*A212hj - ch3122hjk*A212ih

In generale, per fare la derivata covariante di un tensore di rango R bisogna fare la derivata ordinaria ed aggiungere tanti pseudotensori correttivi quanto è il rango del tensore derivato covariantemente.
Per ogni indice del tensore si aggiunge, se l'indice è controvariante, o si toglie, se l'indice è covariante, un termine di Christoffel il cui terzo indice è l'indice aggiunto dalla derivata mentre dei primi due uno è saturato con l'indice considerato e l'altro assume il nome dell'indice considerato. Ovviamente la saturazione rispetta la regola di Einstein ossia si usa l'indice covariante del simbolo di Christoffel se nel tensore l'indice è controvariante e viceversa l'indice controvariante se nel tensore l'indice è covariante. Con altre parole, se l'indice considerato del tensore X di rango R si chiama q e l'indice della derivata si chiama k mentre uso h come indice ripetuto per la saturazione , il contributo del simbolo di Christoffel da contrarre con l'indice q di X vale ch3122qhk se q è controvariante mentre il contributo vale -ch3122hqk se q è covariante.

Riporto qui una funzione che applica queste regole ossia calcola la derivata covariante del tensore passato in argomento. Spezzo il calcolo in due fasi ossia prima calcolo la derivata ordinaria del tensore e a questa aggiungo la correzione necessaria per ottenere la derivata covariante. Per quanto concerne la derivata ordinaria:

```
(* ten_ == tensore da derivare *)
(* var_ == lista delle variabili usate *)
derord[ten_, var_] := Block[{i, n, cambia},
   n = ArrayDepth[ten] + 1;
   cambia = Table[Mod[n + i - 2, n] + 1, {i, 1, n}];
   Transpose[Table[D[ten, var[[i]]], {i, 1, Length[var]}], cambia]
  ];
derord::usage = "Calcola la derivata ordinaria di un tensore";
```

mentre i contributi necessari per calcolare la derivata covariante sono generati da questa funzione:

```
(* ten_ == tensore da correggere per rendere covariante la sua derivata *)
(* gamma_ == simbolo di Christoffel di seconda specie *)
(* tipo_ == lista del tipo di indici del tensore da derivare,
   pari se covariante, dispari se controvariante *)
dercov[ten_, gamma_, tipo_] := Block[{ga, nuovo, per, prp, i, n, ii, nc},
    (* aggiunta per derivata covariante *)
    n = ArrayDepth[ten];
    nc = Length[tipo];
    ga = Transpose[gamma];
    ii = Min[n, nc];
    (* pari == covariante, dispari == controvariante *)
    If[Mod[tipo[[ii]], 2] == 0,
     nuovo = -ten.gamma,
     nuovo = ten.ga];
    If[n == 1, Return[nuovo] ];
    per = Range[n];
    prp = Range[n + 1];
    For[i = n - 1, i > 0, i--,
     per[[n]] = i;
     per[[i]] = n;
     prp[[n]] = i;
     prp[[i]] = n;
     ii = Min[i, nc];
     If[Mod[tipo[[ii]], 2] == 0,
      nuovo = nuovo - Transpose[Transpose[ten, per].gamma, prp],
      nuovo =  nuovo + Transpose[Transpose[ten, per].ga, prp]
     ];
     per = Range[n];
     prp = Range[n + 1]];
    nuovo];
dercov::usage = "Calcola il contributo
     correttivo da aggiungere per ottenere la derivata covariante";
```

Naturalmente gli esempi applicativi di queste convenzioni sono innumerevoli... Si guardi, per esempio, in questi indirizzi:

http://www.elegio.it/mc2/Ricci-Riemann.html

http://www.elegio.it/mc2/maxwell-generale.html

dove sono riportate varie formule utili anche per l'elettromagnetismo.

In questo file sono state definite le seguenti funzioni:

```
listadefinizioni = Sort[{ "faCh3122", "faRiemann41222", "faRiemann42222",
"faRicci222" , "dercov", "derord"}]
```

```
{dercov, derord, faCh3122, faRicci222, faRiemann41222, faRiemann42222}
```

Per visualizzare la struttura di queste funzioni scrivere ?nome oppure ??nome (ossia usare le funzioni Information[...] o Definition[...])

Conclusioni 2012

Non è possibile avere la botte piena e la moglie ubriaca...

Queste convenzioni portano ad usare nomi lunghi, molto diversi dai nomi concisi ed "eleganti" che compaiono nelle formule matematiche.

Pur con questo inevitabile difetto credo che queste convenzioni siano utili a livello di programmazione e quando si è costretti a scrivere documenti in puro testo, ossia quando, per esempio bisogna comunicare qualche formula tramite la posta elettronica.

Giampaolo Bottoni : gpbottoni@gmail.com